UNIDAD 5: PROGRAMACIÓN LINEAL

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

*La **Programación Lineal** es una parte de la Matemática relativamente reciente (siglo XX) cuyo objetivo principal es resolver situaciones, en la mayoría de ocasiones de las Ciencias Sociales, en las que se pretende optimizar determinada función sujeta a ciertas condiciones.*

Los orígenes están en la resolución de problemas militares durante la II Guerra Mundial. Muy pronto, se encontraron numerosas aplicaciones fuera del campo militar, como el "problema del transporte", estudiado por Kantorovich y Koopmans. En 1947, **George Dantzig** *inventó un algoritmo para resolver estos problemas denominado "Método del simplex" que no abordaremos en esta unidad debido a su complejidad.*

Recientemente, en 1984, el matemático de origen indio **Narendra Karmarkar**, ha ideado un nuevo método más efectivo que el del *simplex, llamado "Algoritmo Karmarkar" en su honor.*

En general, los problemas de programación lineal pueden llegar a ser bastante largos y complejos. En esta unidad nos centraremos únicamente en un caso muy concreto de ellos, que es el caso de problemas con dos variables y en regiones acotadas.

A lo largo de esta unidad analizaremos y resolveremos situaciones como la siguiente: "Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál sería dicho ingreso?"

2.- INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Definición 1: Una **inecuación lineal** con dos incógnitas es una desigualdad con, a lo sumo, dos incógnitas y de primer grado, es decir, reducible a uno de los siguientes tipos:

a) $ax+by>c$ b) $ax+by\geq c$ c) $ax+by<c$ d) $ax+by\leq c$

Al conjunto de puntos del plano que satisfacen la inecuación se le llama **solución** de la inecuación o **región factible**. Normalmente lo representaremos por Ω.

Nota 1: Observemos que mientras que en los casos a y c la frontera de la región factible es abierta (no entra en la solución), en los casos b y d sí que forma parte de la región.

Nota 2: Hemos de tener en cuenta también que nosotros nos vamos a centrar única y exclusivamente en la resolución gráfica, ya que la analítica no nos sirve de mucho en esta unidad.

Nota 3: **(Resolución gráfica de inecuaciones lineales con dos incógnitas)** Aunque hay casos muy sencillos, como las inecuaciones incompletas (en las que falta x o y), como método general para resolverlas, haremos lo siguiente:

1º) Consideramos la ecuación $ax+by=c$, asociada a la inecuación, que se obtiene convirtiendo la desigualdad en una igualdad.

2º) Representamos la recta asociada a esta ecuación, de forma discontinua en los casos a y c y de forma continua en los casos b y d. Para ello, basta encontrar dos puntos por los que pase. Esto se puede hacer a ojo o despejando una de las incógnitas en función de la otra.

3º) Esta recta divide al plano en dos semiplanos, uno de los cuales será la región factible. Para saber cuál de las dos es la región factible, basta sustituir un punto que no esté en la recta (frontera) y ver si verifica o no la inecuación de partida. En multitud de ocasiones funciona con el origen $O(0,0)$.

4º) Para expresar la región factible existen dos criterios: rallar la región factible o rallar la otra y dejar la región factible en blanco. Por comodidad, seguiremos este segundo criterio, siempre designando claramente con Ω a la región factible.

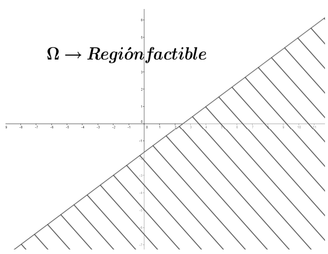
Veámoslo claramente en un ejemplo:

Ejemplo 1: Resolvamos gráficamente la inecuación $2x-3y\geq 5$

1º) Consideramos la ecuación asociada y la recta: $r: 2x-3y=5$

2º) Es evidente que pasa por los puntos $A(1,-1)$ y $B(4,1)$.

3º) Trazamos la recta de forma continua y observamos que, por ejemplo, el origen $O(0,0)$ no pasa por ella. Sustituyendo en la inecuación se obtiene $0\geq 5$, que es falso. Así pues, $O(0,0)$ pertenece al semiplano que no es la región factible y lo rallamos.



3.- SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES.

Definición 2: Un **sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas** es cualquier conjunto de varias inecuaciones lineales con dos incógnitas de las vistas en la definición 1. De manera análoga, al conjunto de puntos del plano que satisfacen todas las inecuaciones se le llama **solución** del sistema o **región factible**. Normalmente lo representaremos por Ω.

Nota 4: **(Resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas)** Aunque hay casos muy sencillos, como las inecuaciones incompletas (en las que falta x o y), como método general para resolverlos, haremos lo siguiente:

1º) Representar, en el mismo plano, las soluciones de cada una de las inecuaciones que forman el sistema siguiendo los pasos de la nota 3.

2º) La región factible del sistema será la intersección de todas las regiones soluciones de la inecuaciones que lo forma, así que si rallamos la parte que no es solución en cada inecuación, la región factible del sistema será la que queda en blanco. Es importante que designemos claramente con Ω la región factible.

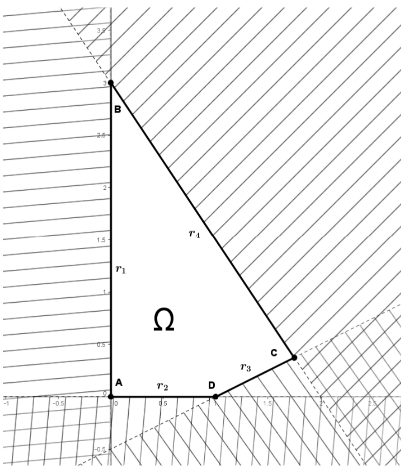
Nota 5: En la mayoría de situaciones que nos encontraremos a continuación, las regiones factibles serán polígonos a los que les tendremos que determinar los vértices de dicho polígono. Estos vértices vienen determinados por la solución del sistema de ecuaciones que forman las rectas en las que se cortan.

Veámoslo claramente en un ejemplo:

Ejemplo 2: Hallemos la región factible y los vértices del sistema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \leq 1 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$

1º) Para ello, consideramos las rectas asociadas a cada inecuación: $\begin{cases} r_1 : x = 0 \\ r_2 : y = 0 \\ r_3 : x - 2y = 1 \\ r_4 : 3x + 2y = 6 \end{cases}$

2º) Representamos una a una las cuatro rectas. Obsérvese que las dos primeras se representan fácilmente sin necesidad de buscar dos puntos por los que pase, ya que son los ejes coordenados. Para r_3 y r_4 buscamos a ojo dos puntos. Es fácil ver que pasan por
los siguientes:



r_3	
x	y
1	0
-1	-1

r_4	
x	y
2	0
0	3

3º) Sustituyendo en cada inecuación un punto por el que no pase la recta y rallando la parte que no es la solución, nos queda la región factible siguiente.

4º) Para hallar los vértices, vamos resolviendo los sistemas de las rectas en las que se cortan:

$$A:\begin{cases} r_1: x=0 \\ r_2: y=0 \end{cases} \to A(0,0) \qquad B:\begin{cases} r_1: x=0 \\ r_4: 3x+2y=6 \end{cases} \to B(0,3)$$

$$C:\begin{cases} r_3: x-2y=1 \\ r_4: 3x+2y=6 \end{cases} \to C\left(\frac{7}{4},\frac{3}{8}\right) \qquad D:\begin{cases} r_2: y=0 \\ r_3: x-2y=1 \end{cases} \to D(1,0)$$

Se propone la **actividad 1.**

4.- PROGRAMACIÓN LINEAL. FORMULACIÓN GENERAL

*Como ya comentamos en la introducción , la **Programación Lineal**, es una parte de las Matemáticas cuya tarea consiste en optimizar funciones lineales cuyas variables están sujetas a una serie de restricciones en forma de inecuaciones. En esta unidad únicamente abordaremos el caso de situaciones en la que haya dos variables y sujetas, casi siempre, a no más de cinco restricciones. De la misma forma se hace con más restricciones.*

Definición 3: Llamamos **Programa Lineal** o problema de programación lineal a todo problema consistente en hallar el valor óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal de dos variables, **llamada función objetivo**, dentro de un recinto determinado por unas restricciones en forma de inecuaciones.

Al recinto determinado por las restricciones lo llamaremos **Región Factible (Ω)** y al valor o conjunto de valores que hagan a la función objetivo sea óptima lo llamaremos **solución** óptima. Abreviadamente lo escribiremos:

$$\begin{cases} Máx: f(x,y)=px+qy+r \\ \text{Restricciones: } \begin{cases} a_1x+b_1y > c_1 \\ a_2x+b_2y \le c_2 \\ .... \\ .... \\ a_nx+b_ny \ge c_n \end{cases} \end{cases} \quad \text{o bien:} \quad \begin{cases} Mín: f(x,y)=px+qy+r \\ \text{Restricciones: } \begin{cases} a_1x+b_1y > c_1 \\ a_2x+b_2y \le c_2 \\ .... \\ .... \\ a_nx+b_ny \ge c_n \end{cases} \end{cases}$$

Donde, evidentemente las desigualdades pueden ser de los 4 tipos vistos.

Nota 6: Casi en todos los problemas que veremos, la función objetivo será homogénea, es decir, con $r=0$, con lo que quedará de la forma: $f(x,y)=px+qy$

También va a ocurrir que en casi todos los problemas que veamos las regiones factibles serán, además de acotadas, cerradas, ya que las desigualdades que suelen aparecer son $\le$ o bien $\ge$.

5.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

En este punto nos vamos a dedicar a resolver, a modo de ejemplo algunos programas lineales intentando abarcar todos los casos posibles. Antes, veamos algunas propiedades importantes que nos van a ayudar a pensar en los pasos que hemos de seguir para resolverlo.

Proposición 1: (Propiedades de las soluciones de un Programa Lineal): En cualquier programa lineal de los descritos anteriormente, se cumple:

a) La/s soluciones del programa lineal están siempre en la frontera de la región factible, nunca en el interior.

b) A medida que nos movemos de un vértice de la región factible a otro, los valores de la función objetivo, o crecen, o decrecen o se mantienen constante. Lo que nunca hacen es alcanzar máximos ni mínimos entre un vértice y otro.

Como consecuencia de las propiedades a) y b) tendremos las siguientes:

c) Si un programa lineal tiene solución única, entonces se encuentra en uno de los vértices de la región factible.

d) Si una función objetivo toma el mismo valor en dos vértices, entonces también toma ese mismo valor en todos los puntos del segmento que une estos vértices y, por tanto, tiene infinitas soluciones (todos los puntos del segmento).

Nota 7: (Método de resolución de Programas Lineales). Aunque existen varios métodos de resolución de programas lineales, a partir de la proposición anterior, podemos describir un método rápido y sencillo para resolver programas lineales:

1º) A partir del enunciado verbal, hemos de plantear el programa lineal. Lo primero es nombrar las variables y determinar la función objetivo y después, escribir las restricciones que determinarán la región factible en forma de sistema de inecuaciones lineales.
2º) Determinar la región factible asociada a las restricciones del programa lineal
3º) Hallar los vértices de la región factible.
4º) Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices.
5º) Determinar el valor (o valores) óptimo y contestar a las cuestiones que se planteen.

Ejemplo 3: Una fábrica de cajas de cartón hace dos tipos de cajas. Unas cajas con base cuadrada, que dejan un beneficio de 0,12 € la unidad, y en las que gasta 2 m de cinta adhesiva y 0,5 m de rollo de cartón, y otras de base rectangular, que dejan un beneficio de 0,08 € la unidad, y en las que gasta 4 m de cinta adhesiva y 0,25 m de rollo de cartón. Si la fábrica dispone de 440 m de cinta adhesiva y 65 m de rollo de cartón, ¿cuántas cajas de cada tipo debe fabricar para que el beneficio sea máximo?

1º) Lo primero que debemos hacer es nombrar las incógnitas y buscar la función objetivo. Llamaremos x al número de cajas de base cuadrada e y al número de cajas de base rectangular. Es evidente que nos piden los valores de x e y que hagan máximo beneficio y, por tanto, la función objetivo será: $f(x,y)=0{,}12x+0{,}08y$. Además, conviene tener en cuenta que tanto x como y han de ser enteros no negativos (no valen valores decimales, al menos en la solución)

Tenemos que escribir las restricciones que nos darán lugar a la región factible. Si volvemos a leer el texto, tenemos 4 restricciones:

- Es evidente que, al ser variables no negativas, debe cumplirse: $x \geq 0\ ,\ y \geq 0$
- Como tenemos 440 m de cinta disponible, entonces: $2x + 4y \leq 440$
- Como tenemos 65 m de rollo de cartón disponible, entonces: $0,5x + 0,25y \leq 65$

En estas situaciones, suele ser de ayuda una tabla como la siguiente:

	Caja cuadrada (x)	Caja rectangular (y)	Total
Precio (€/unidad)	0,12	0,08	0,12x+0,08y
Cinta (m)	2	4	440
Cartón (m)	0,5	0,25	65

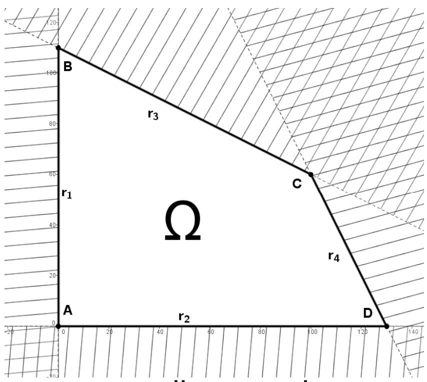
En cualquier caso, el programa lineal a resolver es: $\begin{cases} Máx: f(x,y) = 0{,}12x + 0{,}08y \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \\ 2x + 4y \leq 440 \\ 0{,}5x + 0{,}25y \leq 65 \end{cases} \end{cases}$,

que simplificando un poco queda más cómodo: $\begin{cases} Máx: f(x,y) = 0{,}12x + 0{,}08y \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 220 \\ 2x + y \leq 260 \end{cases} \end{cases}$, dividiendo la 3ª restricción entre 2 y multiplicando la 4ª por 4.

2º) Tenemos que determinar la región factible de la forma en que lo hicimos en los anteriores puntos de la unidad.

Es decir, consideramos las rectas: $\begin{cases} r_1 : x = 0 \\ r_2 : y = 0 \\ r_3 : x + 2y = 220 \\ r_4 : 2x + y = 260 \end{cases}$

Las dos primeras (restricciones de no negatividad) son muy sencillas y se pueden trazar directamente. Para la 3ª y la 4ª recta buscamos dos puntos, las trazamos y vemos la región que corresponde a cada inecuación. Haciendo todo esto, obtenemos la región factible de la derecha.



3º) A continuación, resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes, obtenemos los vértices de la región factible, que salen: $A(0,0)$, $B(0,110)$, $C(100,60)\ y\ D(130,0)$.

4º) Evaluamos los vértices en la función objetivo: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(0,110) = 8,80 \\ f(100,60) = 16,80 \ \rightarrow Máx \\ f(130,0) = 15,60 \end{cases}$

Vemos que el máximo se obtiene para $x=100$, $y=60$ y que vale 16,80.

5º) Respondemos a las cuestiones que se nos planteen. En este caso la respuesta es que se deben hacer 100 cajas de base cuadrada y 60 de base rectangular. Aunque no me lo piden, podemos decir que dicho beneficio máximo es de 16,80 € con su fabricación.

Ejemplo 4: **(Problema del transporte)**. El problema del transporte es uno de los más populares de la programación lineal. Veamos un ejemplo de este: "Desde dos almacenes, A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste del transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado por la tabla adjunta. Planifica el transporte para que el coste sea mínimo."

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10 €	15 €	20 €
B	15 €	10 €	10 €

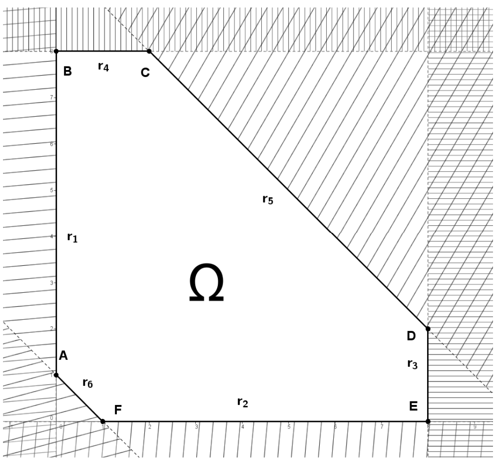
1º) Vamos a llamar x a la cantidad de mercancía (en toneladas) que abastece el almacén A al mercado 1 e y a la cantidad de mercancía (en toneladas) que abastece el almacén A al mercado 2, el resto de mercancía queda como muestra la siguiente tabla:

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	x	y	10-x-y
B	8-x	8-y	9-(10-x-y)=x+y-1

La función objetivo se obtiene sumando todos los costes del transporte y serán: $f(x,y)=10x+15y+20(10-x-y)+15(8-x)+10(8-y)+10(x+y-1)=-15x-5y+390$

Las restricciones se obtienen obligando a que todas las mercancías sean cantidades positivas, con lo que el programa lineal queda: $\begin{cases} Mín: f(x,y)=-15x-5y+390 \\ \text{Restricciones:}\begin{cases} x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \\ x\leq 8 \\ y\leq 8 \\ x+y\leq 10 \\ x+y\geq 1 \end{cases} \end{cases}$

2º) Pasamos, como en ejemplos anteriores, a determinar la región factible. Para ello, representamos las rectas que determinarán la frontera, que son: $\begin{cases} r_1: x=0 \\ r_2: y=0 \\ r_3: x=8 \\ r_4: y=8 \\ r_5: x+y=10 \\ r_6: x+y=1 \end{cases}$



Las dos primeras (restricciones de no negatividad) así como la 3ª y la 4ª son muy sencillas y se pueden trazar directamente al ser rectas verticales y horizontales. Para la 5ª y la 6ª recta buscamos dos puntos, las trazamos y vemos la región que corresponde a cada inecuación. Haciendo todo esto, obtenemos la región factible representada.

3º) A continuación, resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes, obtenemos los vértices de la región factible: $A(0,1)$, $B(0,8)$, $C(2,8)$, $D(8,2)$, $E(8,0)$ *y* $F(1,0)$.

4º) Evaluamos los vértices en la función objetivo: $\begin{cases} f(0,1)=385 \\ f(0,8)=350 \\ f(2,8)=320 \\ f(8,2)=260 \ \rightarrow Mín \\ f(8,0)=270 \\ f(1,0)=375 \end{cases}$

Vemos que el máximo se obtiene para $x=8$, $y=2$ y que vale 260.

5º) Respondemos a las cuestiones que se nos planteen. En este caso la respuesta es que <u>el coste mínimo se consigue transportando desde el almacén A, 8 toneladas al mercado 1, 2 al mercado 2 y nada al mercado 3; y desde el almacén B, nada al mercado 1, 6 al mercado 2 y 9 al mercado 3</u>. Aunque no me lo piden, podemos decir que el coste mínimo conseguido es de 260 € con esta distribución óptima.

<u>Ejemplo 5:</u> Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, F_1 y F_2. Los del tipo F_1 cuestan 300 € y los del tipo F_2, 500 €. Solo dispone de sitio para 20 frigoríficos y de 7000 € para hacer las compras. ¿Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada frigorífico gana el 30% del precio de compra?

1º) Lo primero que debemos hacer es nombrar las incógnitas y buscar la función objetivo. Llamaremos x al número de frigoríficos del tipo F_1 e y al número de frigoríficos del tipo F_2. Es evidente que nos piden los valores de x e y que hagan máximo beneficio y, por tanto, la función objetivo será: $f(x,y)=90x+150y$ (los valores 90 y 150 se obtienen haciendo el 30% de los precios de coste 300 y 500 respectivamente).

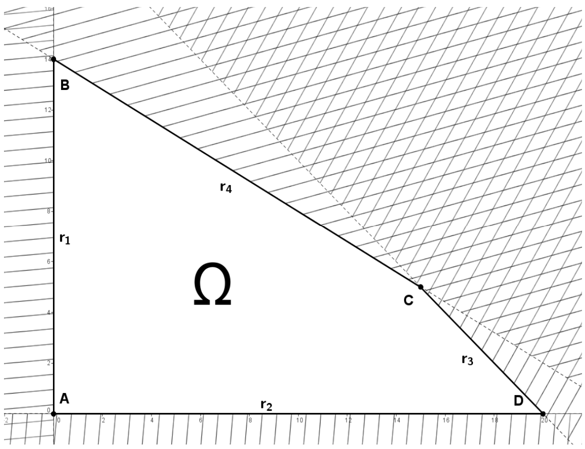
Además, conviene tener en cuenta que tanto x como y han de ser enteros no negativos (no valen valores decimales, al menos en la solución).
Tenemos que escribir las restricciones que nos darán lugar a la región factible. Si volvemos a leer el texto, tenemos 4 restricciones:

- Es evidente que, al ser variables no negativas, debe cumplirse: $x \geq 0$, $y \geq 0$
- Como tenemos sitio únicamente para 20 frigoríficos, entonces: $x+y \leq 20$
- Como tenemos únicamente 7000 € disponible, entonces: $300x+500y \leq 7000$

El programa lineal a resolver es: $\begin{cases} Máx: f(x,y) = 90x + 150y \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \\ x + y \leq 20 \\ 300x + 500y \leq 7000 \end{cases} \end{cases}$, que simplificando un poco queda más cómodo: $\begin{cases} Máx: f(x,y) = 90x + 150y \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \\ x + y \leq 20 \\ 3x + 5y \leq 70 \end{cases} \end{cases}$, dividiendo la 4ª restricción por 100.

2º) Para determinar la región factible, consideramos las rectas: $\begin{cases} r_1: x = 0 \\ r_2: y = 0 \\ r_3: x + y = 20 \\ r_4: 3x + 5y = 70 \end{cases}$

Las dos primeras (restricciones de no negatividad) son muy sencillas y se pueden trazar directamente. Para la 3ª y la 4ª recta buscamos dos puntos, las trazamos y vemos la región que corresponde a cada inecuación. Haciendo todo esto, obtenemos la región factible de la derecha.



3º) A continuación, resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes, obtenemos los vértices de la región factible, que salen: $A(0,0)$, $B(0,14)$, $C(15,5)$ y $D(20,0)$.

4º) Evaluamos los vértices en la función objetivo: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(0,14) = 70 \\ f(15,5) = 70 \\ f(20,0) = 60 \end{cases}$

Vemos que en este caso no hay un vértice en el que la función objetivo alcance el valor máximo sino dos vértices. Según hemos visto en la teoría, en este caso, en cualquier punto del segmento BC, también se obtiene un valor de 70 y, por tanto, alcanza también el valor máximo. Como los valores deben ser enteros, estos son los puntos $(0,14)$, $(5,11)$, $(10,8)$ y $(15,5)$

5º) Así pues, la respuesta es que hemos de comprar <u>0 frigoríficos de tipo F_1 y 14 de tipo F_2, o bien, 5 frigoríficos de tipo F_1 y 11 de tipo F_2, o bien, 10 frigoríficos de tipo F_1 y 8 de tipo F_2, o bien, 15 frigoríficos de tipo F_1 y 5 de tipo F_2, ya que estos son todos los pares de valores enteros entre B y C. El beneficio máximo es de 70 €.</u>

Nota 8: Conviene observar que en la inmensa mayoría de los programas lineales que veremos, la solución será única, con lo que nos encontraremos casos como los ejemplos 3 y 4 casi siempre.

Se proponen las **actividades 2 y 3.**

6.- ACTIVIDADES.

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Representa la región factible asociada a los siguientes sistemas y determina sus vértices:

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 3 \\ x + y \leq 10 \\ 2y \geq 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - x \leq 2 \\ x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 16 \\ 2x + y \leq 20 \end{cases}$

Actividad 2: Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1500 personas, entre adultos y niños. El número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada a una sesión de un adulto es de 4,8 €, mientras que la de un niño es de un 40% menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

Actividad 3: Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 24000 € y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 6000 € y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 4: Dado el sistema de inecuaciones siguiente: $\begin{cases} 2x + y \leq 18 \\ 2x + 3y \leq 26 \\ x + y \leq 16 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$

a) Representa gráficamente el recinto definido por el sistema anterior:
b) Calcula los vértices de ese recinto.
c) Obtén en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = 5x + 3y$. Di en qué puntos se alcanzan.

Actividad 5: Dado el sistema de inecuaciones siguiente: $\begin{cases} x+2y \geq -4 \\ y \leq x+1 \\ x+3y \leq 3 \\ 2x \leq 3y+6 \end{cases}$

a) Representa gráficamente el recinto definido por el sistema anterior:
b) Calcula los vértices de ese recinto.
c) Obtén en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=x-2y+5$. Di en qué puntos se alcanzan.

Actividad 6: Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 0,9 € y 0,6 € el metro respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre para cada Hm del tipo B. Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que le cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

Actividad 7: Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20 euros; para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35 euros. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes.

Actividad 8: Una persona desea adelgazar. En la farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para que tome una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes condiciones:

- No debe tomar más de 150 g de la mezcla, ni menos de 50 g.
- La cantidad de A debe ser mayor o igual que la de B.
- No debe incluir más de 100 g del compuesto A.

Se sabe que cada 100 g de A contienen 30 mg de vitaminas y cada 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas.

a) Formule matemáticamente el conjunto de restricciones, dibuje la región factible y determine sus vértices.
b) ¿Cuántos gramos debe tomar de cada compuesto para obtener el preparado más rico en vitaminas?

Actividad 9: Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A ó B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B. La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2,7% y la de los B ha sido del 6,3%. Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtenga el máximo beneficio. Calcule este beneficio.

Actividad 10: Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón. Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y

100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1,75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro. Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

Actividad 11: Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches. La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y reporta un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y reporta un beneficio de 15 euros. Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 12: (2013) Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,
a) ¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?
b) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

Actividad 13: (2013)

a) Plantea, sin resolver, el siguiente problema: “Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos más el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?”

b) Dado el recinto limitado por las inecuaciones: $y \geq 30$; $3x - y \geq 150$; $6x + 7y \leq 840$, halla en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$, alcanza su valor mínimo.

Actividad 14: (2013) Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

Actividad 15: (2013) En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son $A(2,1)$, $B(1,2)$, $C(1,4)$ y $D(5,0)$. La función objetivo es la función $f(x, y) = 2x + 3y + k$, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcula el valor de k e indica dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo.

Actividad 16: (2013) Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones: $5x-4y\leq 20$, $x+8y\leq 48$, $x\geq 2$, $y\geq 0$

a) Representa gráficamente el recinto R y calcula sus vértices.

b) Halla los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=2x+12y$ en este recinto e indica dónde se alcanzan.

c) Razona si existen valores (x,y) pertenecientes al recinto para los que $F(x,y)=100$

Actividad 17: (2013) Se desea maximizar la función $F(x,y)=14x+8y$ en el recinto dado por: $y+3x\geq 9$, $y\leq \frac{-4}{7}x+14$, $5x-2y\leq 15$, $x\geq 0$.

a) Representa la región factible del problema.

b) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?

c) Obtén un punto de la región factible que no sea el óptimo.

Actividad 18: (2013) Sea R la región factible definida por las inecuaciones $x\geq 3y$; $x\leq 5$; $y\geq 1$

a) Razona si el punto $(4.5,1.55)$ pertenece a R.

b) Dada la función objetivo $F(x,y)=2x-3y$, calcula sus valores extremos en R.

c) Razona si hay algún punto de R donde la función F valga 3.5 . ¿Y 7.5 ?

Actividad 19: (2012) Sea el recinto limitado por las siguientes inecuaciones: $y+2x\geq 2$; $2y-3x\geq -3$; $3y-x\leq 6$

a) Representa gráficamente dicho recinto.

b) Calcula sus vértices.

c) Obtén el valor mínimo de la función $F(x,y)=2x-y$ en el recinto anterior, así como dónde lo alcanza.

Actividad 20: (2012) Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones: $3x+4y\geq 28$; $5x+2y\leq 42$; $x-y\geq 0$

a) Razona si el punto de coordenadas $(7,3)$ pertenece al recinto.

b) Representa dicho recinto y halla sus vértices.

c) Calcula el valor máximo de la función $F(x,y)=3x-2y+6$ en el recinto, indicando el punto
o los puntos donde se alcanza ese máximo.

Actividad 21: (2012) Un comerciante dispone de 1200 € para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0.60 €/kg y las vende a 0.90 €/kg, mientras que las de tipo B las compra a 1 €/kg y las vende a 1.35 €/kg. Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?

Actividad 22: (2012)

a) Representa la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices. $7x - y \geq -10$; $x + y \leq 2$; $3x - 5y \leq 14$

b) Calcula los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y) = 2x + 3y$ en dicha región.

Actividad 23: (2012) En una carpintería se construyen dos tipos de estanterías: grandes y pequeñas, y se tienen para ello 60 m^2 de tableros de madera. Las grandes necesitan 4 m^2 de tablero y las pequeñas 3 m^2. El carpintero debe hacer como mínimo 3 estanterías grandes, y el número de pequeñas que haga debe ser, al menos, el doble del número de las grandes. Si la ganancia por cada estantería grande es de 60 euros y por cada una de las pequeñas es de 40 euros, ¿cuántas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Actividad 24: (2012) Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y una cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros. Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

Actividad 25: (2011) Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones: $x + y \leq 20$; $3x + 5y \leq 70$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) Razona si el punto de coordenadas $(4.1, 11.7)$ pertenece al recinto.

b) Representa dicho recinto y calcula sus vértices.

c) ¿Dónde alcanzará la función $F(x,y) = 0.6x + y$ sus valores extremos y cuáles serán éstos?

Actividad 26: (2011)

a) Representa gráficamente el recinto determinado por las siguientes inecuaciones: $6x - y + 9 \geq 0$; $2x + 5y - 13 \leq 0$; $2x - 2y - 5 \leq 0$

b) Determina los vértices del recinto anterior.

c) Halla los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y) = 3x - 2y + 3$ en el recinto del primer apartado, y especifica en qué puntos los alcanza.

Actividad 27: (2011) Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda. Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?

Actividad 28: (2011)

a) Dibuja el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determina sus vértices. $y \geq 200-2x$; $x-100 \leq 3y$; $x+2y \leq 600$; $x \geq 0$

b) Sabiendo que $A(0,2)$, $B(1,4)$, $C(3,4)$, $D(4,2)$ y $E(2,1)$ son los vértices de una región factible, determina en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x,y)=10x+5y+21$, e indica los puntos donde se alcanza.

Actividad 29: (2011) Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones: $13x+8y \leq 600$; $3(x-2) \geq 2(y-3)$; $x-4y \leq 0$

a) Representa gráficamente el recinto R y calcula sus vértices.

c) Calcula el valor máximo en dicho recinto de la función $F(x,y)=65x+40y$, indicando donde se alcanza.

Actividad 30: (2011) Se considera el recinto R del plano, determinado por las siguientes inecuaciones: $x+y \geq 2$; $x+3y \leq 15$; $3x-y \leq 15$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) Representa gráficamente el recinto R y calcula sus vértices.

b) Halla los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=3x+y$ en dicho recinto.

c) Razona si existen puntos (x,y) del recinto, para los que $F(x,y)=30$.

Actividad 31: (2010) Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes: $x+y \leq 15$; $x \leq 2y$; $0 \leq y \leq 6$; $x \geq 0$

a) Representa gráficamente dicho recinto.

b) Calcula sus vértices.

c) Determina el máximo valor de la función $f(x,y)=8x+5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza.

Actividad 32: (2010) Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones: $x+y \leq 3$; $-x+y \leq 3$; $x \leq 2$; $y \geq 0$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Calcula los vértices de dicho recinto.

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=-2x-y$? ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

Actividad 33: (2010)

a) Representa la región definida por las siguientes inecuaciones y determina sus vértices: $x \leq 2$; $y \geq -4x+8$; $3y-4x-16 \leq 0$

b) Calcula los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=3x-y$, y los puntos donde se alcanzan.

Actividad 34: (2010) Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 € para los del tipo A y de 40€ para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste?

Actividad 35: (2010) Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos: $4x-y\geq 4$; $2x+y\leq 15$; $3y-x\leq 10$; $y\geq 0$

a) Representa el recinto y calcula sus vértices.
b) Calcula los puntos del recinto donde la función $F(x,y)=4x-7y$ alcanza el máximo y el mínimo.
c) ¿Entre que valores varía la función $F(x,y)=4x-7y$ en el recinto?

Actividad 36: (2010) Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas, A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 € el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 € el contenedor. El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos, pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores. ¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indica cuál sería ese coste mínimo.

Actividad 37: (2010)

a) Dibuja el recinto del plano definido por las inecuaciones: $x+3y\geq 9$; $4x-5y+25\geq 0$; $7x-2y\leq 17$; $x\geq 0$; $y\geq 0$
b) Calcula los vértices del mismo.
c) Obtén en dicho recinto los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=2x-y+6$ y los puntos donde se alcanzan.

Actividad 38: (2010) Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones: $3x+y\geq 4$; $x+y\leq 6$; $0\leq y\leq 5$

a) Represéntalo gráficamente.
b) Calcula los vértices de dicho recinto.
c) En el recinto anterior, halla los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=5x+3y$. ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

Actividad 39: (2009)

a) Dibuja el recinto definido por las siguientes restricciones: $x+y\geq 2$; $x-y\leq 0$; $y\leq 4$; $x\geq 0$
b) Determina el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=x+y$ en el recinto anterior y los puntos dónde se alcanza.

c) ¿Pertenece el punto $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ al recinto anterior? Justifica la respuesta.

Actividad 40: (2009) En un examen de Matemáticas se propone el siguiente problema: "Indica dónde se alcanza el mínimo de la función $F(x,y)=6x+3y-2$ en la región determinada por las restricciones $2x+y\geq 6$; $2x+5y\leq 30$; $2x-y\leq 6$"

a) Resuelve el problema.
b) Ana responde que se alcanza en $(1,4)$ y Benito que lo hace en $(3,0)$ ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en $(1,4)$? ¿Es cierto que se alcanza en $(3,0)$?

Actividad 41: (2009) Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha. A hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha. Y el de hortalizas de 3000 euros/ha., no pudiendo superar el coste la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. De cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halla la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcula dicho máximo.

Actividad 42: (2009) Obtén los valores máximo y mínimo, indicando donde se alcanzan, de la función objetivo $F(x,y)=x-y$ en la región definida por las restricciones: $6x+y\geq 3$; $2x+y\leq 2$; $y\leq\frac{5}{4}$; $x\geq 0$; $y\geq 0$

Actividad 43: (2009)

a) Plantea, sin resolver, el siguiente problema de programación lineal: "Una empresa fabrica camisas de dos tipos A y B. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa que fabrica del tipo A y de 6 euros por cada una del tipo B. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las del tipo B han de suponer, al menos, el 60% del total. ¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?
b) Representa la región definida por las inecuaciones: $y\leq x$; $y+2x\leq 6$; $x\leq 4y+3$
Calcula el máximo de $F(x,y)=y+2x$ en la región anterior e indica dónde se alcanza.

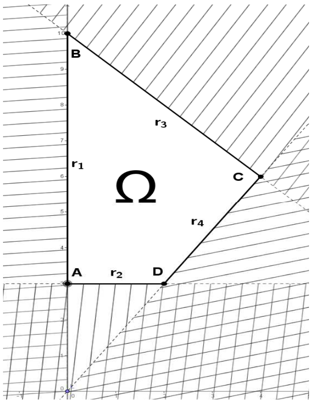
Actividad 44: (2009)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices: $x+3y\leq 12$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\geq 1$; $y\geq 1$; $x\geq 0$
b) Calcula los valores extremos de la función $F(x,y)=5x+15y$ en dicha región y dónde se alcanzan.

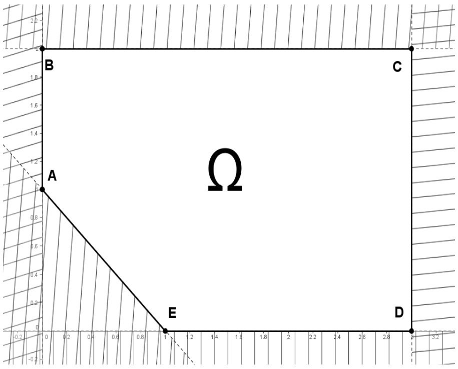
7.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES.

Actividad 1:

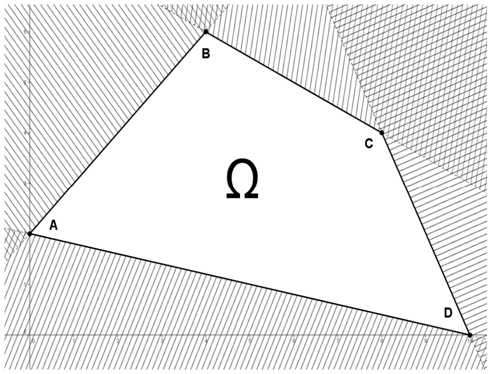
a)



b)



c)



Los vértices son, respectivamente:

a) $A(0,3)$, $B(0,10)$, $C(4,6)$, $D(2,3)$

b) $A(0,1)$, $B(0,2)$, $C(3,2)$, $D(3,0)$, $E(1,0)$

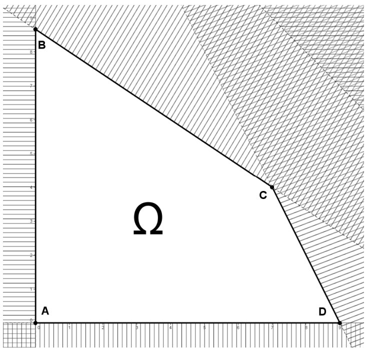
c) $A(0,2)$, $B(4,6)$, $C(8,4)$, $D(10,0)$

Actividad 2: 6240 €, vendiendo 500 entradas de niños y 1000 entradas de adultos.

Actividad 3: 4 de tipo A y 8 de tipo B.

Actividad 4:

a)

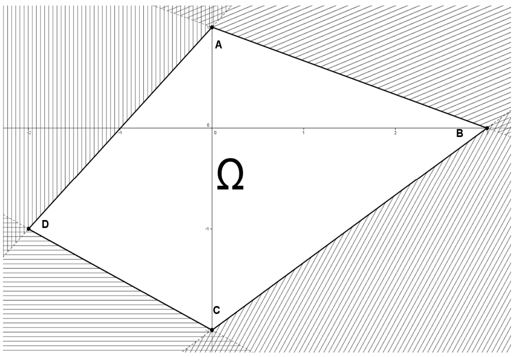


b) Los vértices son $A(0,0)$, $B\left(0,\dfrac{26}{3}\right)$, $C(7,4)$ y $D(9,0)$

c) El valor máximo es 47 y se alcanza en $C(7,4)$. El valor mínimo es 0 y se alcanza en $A(0,0)$.

Actividad 5:

a)



b) $A(0,1)$, $B(3,0)$, $C(0,-2)$ y $D(-2,-1)$

c) El valor máximo es 9 y se alcanza en $C(0,-2)$. El valor mínimo es 3 y se alcanza en $A(0,1)$.

Actividad 6: 12 hectómetros de cable A y 10 hectómetros de cable B.

Actividad 7: 120 librerías de un estante y 15 librerías de tres estantes.

Actividad 8: 100 g de A y 50 g de B.

Actividad 9: 6666,67 € en fondos A y 3333,33 € en fondos B, con un beneficio de 390 €.

Actividad 10: 1600 tortas de almendra y ninguna de turrón, con un beneficio de 2800 €.

Actividad 11: 200 muñecas y 200 coches, con un beneficio de 5000 €.

Actividad 12:
a) El mayor beneficio es de 800000 € y se obtiene fabricando 100 tapices del tipo A y 200 tapices del tipo B.
b) Únicamente sobran 25 kg de hilo de oro.

Actividad 13:

a) $$\begin{cases} Máx: f(x,y) = x + y \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0\,,\ y \geq 0 \\ y \geq \dfrac{x}{4} \\ y \leq 2x \\ 2x + y \leq 100 \end{cases} \end{cases}$$

b) El mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento que une los puntos $(60,30)\ y\ (70,60)$, siendo dicho valor mínimo de 300.

Actividad 14: Se deben fabricar 6 anillos del primer tipo y 8 del segundo tipo. El beneficio máximo es 1700 € .

Actividad 15: $k = 5$. El máximo se alcanza en el punto $(1,4)$ y el mínimo en el punto $(2,1)$.

Actividad 16:

a) Vértices: $A(2,0), B\left(2,\dfrac{23}{4}\right), C(8,5)\ y\ D(4,0)$

b) El máximo se alcanza en el punto $C(8,5)$ y vale 76. El mínimo está en el punto $A(2,0)$ y vale 2.
c) Como el mínimo es 2 y el máximo es 76, el valor 100 no se alcanza en R, ya que es mayor que el máximo.

Actividad 17:

a) Los vértices son $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(8,5)\ y\ D\left(2,\dfrac{23}{4}\right)$

b) El máximo se alcanza en el punto $(7,10)$ y vale 98.

c) Respuesta libre. Un ejemplo es el $(3,0)$.

Actividad 18:

a) No pertenece
b) El máximo se alcanza en el punto $(5,1)$ y vale 7. El mínimo se alcanza en el punto $(3,1)$ y vale 3.
c) El primero sí y el segundo no.

Actividad 19:

a) y b) $A(0,2)$, $B(3,3)$ y $C(1,0)$
c) El mínimo está en $A(0,2)$ y vale -2.

Actividad 20:

a) El punto pertenece al recinto.
b) Los vértices son: $A(4,4)$, $B(6,6)$ y $C(8,1)$
c) El máximo está en el punto $A(8,1)$ y vale 28

Actividad 21: El mayor beneficio es de 487.5 € y se obtiene comprando 750 kg de manzanas del tipo A y 750 kg de manzanas del tipo B.

Actividad 22:

a) Vértices: $A(-2,-4)$, $B(-1,3)$ y $C(3,-1)$
b) El máximo está en el punto $C(3,-1)$ y vale 7 y el mínimo está en el punto $A(-2,-4)$ y vale -16.

Actividad 23: El mayor beneficio es de 840 € y se obtiene haciendo 6 estanterías grandes y 12 estanterías pequeñas.

Actividad 24: El mayor beneficio es de 17250 € y se obtiene fabricando 75 camisas y 300 pantalones.

Actividad 25:

a) No pertenece al recinto
b) Vértices: $A(0,0)$, $B(20,0)$, $C(15,5)$ y $D(0,14)$
c) El máximo está en todos los puntos del segmento CD y vale 14. El mínimo está en $A(0,0)$ y vale 0.

Actividad 26:

a) y b) Vértices: $A(-2,-3)$, $B(-1,-3)$ y $C(4,1)$
c) El máximo está en el punto $B(-1,-3)$ y vale 13 y el mínimo está en el punto $C(4,1)$ y vale -6.

Actividad 27: El mayor beneficio es de 1700 € y se obtiene elaborando 10 unidades del producto A y 20 unidades del producto B.

Actividad 28:

a) Vértices: $A(100,0)$, $B(400,100)$, $C(0,300)$ y $D(0,200)$

b) El máximo está en todos los puntos del segmento CD y vale 71. El mínimo está en el punto A y vale 31.

Actividad 29:

a) Vértices: $A(0,0)$, $B(40,10)$ y $C(24,36)$

b) El máximo está en todos los puntos del segmento BC y vale 3000.

Actividad 30:

a) Vértices $A(0,2)$, $B(0,5)$, $C(6,3)$, $D(5,0)$ y $E(2,0)$

b) El máximo está en el punto $C(6,3)$ y vale 21 y el mínimo el punto $A(0,2)$ y vale 2.

Actividad 31:

a) y b) Vértices: $A(0,0)$, $B(0,6)$, $C(9,6)$ y $D(10,5)$.

c) El máximo está en el punto $D(10,5)$ y vale 105.

Actividad 32:

a) y b) Vértices: $A(-3,0)$, $B(0,3)$, $C(2,1)$ y $D(2,0)$

c) El máximo está en el punto $B(3,0)$ y vale 6 y el mínimo en $C(2,1)$ y vale −5.

Actividad 33:

a) Vértices $A\left(\frac{1}{2},6\right)$, $B(2,8)$ y $C(2,0)$

b) El máximo está en el punto $C(2,0)$ y vale 6 y el mínimo en el punto $A\left(\frac{1}{2},6\right)$ y vale $\frac{-9}{2}$

Actividad 34: Se deben fabricar 80 lotes de cada tipo y se obtendrán unos ingresos de 4800 €

Actividad 35:

a) Vértices: $A(1,0)$, $B(2,4)$, $C(5,5)$ y $D\left(\frac{15}{2},0\right)$

b) El máximo está en el punto $D\left(\frac{15}{2},0\right)$ y vale 30 y el mínimo en $B(2,4)$ y vale -20.

c) La función varía entre -20 y 30

Actividad 36: Debe pedir 10 contenedores del mayorista A y 30 contenedores del mayorista B para que el gasto sea mínimo, es decir, 20000 €.

Actividad 37:

a) y b) Vértices: $A(0,3)$, $B(0,5)$, $C(5,9)$ y $D(3,2)$.

c) El máximo está en el punto $D(3,2)$ y vale 10 y el mínimo en el punto $B(0,5)$ y vale 1.

Actividad 38:

a) y b) Vértices: $A\left(\frac{-1}{3},5\right)$, $B(1,5)$, $C(6,0)$ y $D\left(\frac{4}{3},0\right)$.

c) El máximo está en el punto $C(6,0)$ y vale 30 y el mínimo está en el punto $D\left(\frac{4}{3},0\right)$ y vale $\frac{20}{3}$.

Actividad 39:

a) Vértices: $A(0,2)$, $B(0,4)$, $C(4,4)$ y $D(1,1)$

b) El mínimo está en todos los puntos del segmento AD y vale 2. El máximo está en el punto $C(4,4)$ y vale 8.

c) No, ya que no cumple la 1ª inecuación.

Actividad 40:

a) Los vértices son $A(0,6)$, $B(5,4)$ y $C(3,0)$. El mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento AC y vale 16.

b) Las dos respuestas son correctas aunque incompletas, ya que ambos son puntos del segmento AC.

Actividad 41: El máximo beneficio es de 42000 € y corresponde a 1 ha. de cereales y 5 ha. de hortalizas.

Actividad 42: El máximo está en el punto $C(1,0)$ y vale 1, mientras que el mínimo está en el punto $B\left(\frac{7}{24},\frac{5}{4}\right)$ y vale $\frac{-23}{24}$.

Actividad 43:

a) $$\begin{cases} Máx: f(x,y) = 8x + 6y \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ y \geq \frac{3}{5}x \\ x + y \leq 100000 \end{cases} \end{cases}$$

b) Vértices: $A(-1,-1)$, $B(2,2)$ y $C(3,0)$. El máximo está en todos los puntos del segmento BC y vale 6.

Actividad 44:

a) Vértices: $A\left(\frac{3}{4},\frac{15}{4}\right)$, $B(9,1)$ y $C\left(\frac{12}{5},1\right)$

b) El máximo está en todos los puntos del segmento AB y vale 60. El máximo está en el punto $C\left(\frac{12}{5},1\right)$ y vale 27.

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 12 a la 44 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- **http://emestrada.wordpress.com/category/matematicas-aplicadas-a-las-ccss-ii/**
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***

Además de estas, una web con actividades resueltas que puedes utilizar es la siguiente: **http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2bach/sociales/u-4.pdf**