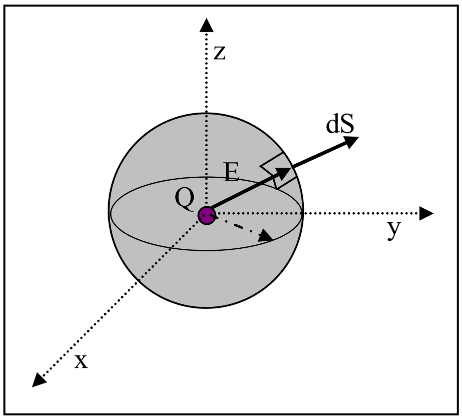
TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

Se trata de aplicar la definición de Flujo del Campo Eléctrico (Φ)

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Para aplicar en cualquier caso esto hemos de partir de una consideración fundamental, al tratarse de un producto escalar hemos de procurar la elección de la superficie de Gauss de forma que sea, en cada punto, paralela o perpendicular al campo, de esta forma el producto escalar coincidirá con el producto de los módulos o será cero.

Para explicar como proceder vamos a suponer una carga Q puntual, la superficie de Gauss elegida será una esfera de radio r, centrada en la carga, en este caso el vector campo y el vector superficie son paralelos y por lo tanto el producto escalar es máximo.



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S K \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} = \oint_S K \frac{Q}{r^2} dS$$

Como r, K y Q son constantes y la superficie de la esfera es 4 π r^2 la integral quedaría:

$$\Phi = K \frac{Q}{r^2} \int_s dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

De este caso particular se puede generalizar la expresión del Teorema de Gauss para el Campo Eléctrico:

El flujo del campo creado por una distribución cualquiera de carga, a través de una superficie cerrada, se calcula siempre como el valor de la carga encerrada por la superficie dividido por la permitividad dieléctrica del medio.

Partiendo de esto y con una cuidadosa selección de superficies se puede calcular de forma sencilla el valor del campo creado por una distribución de carga

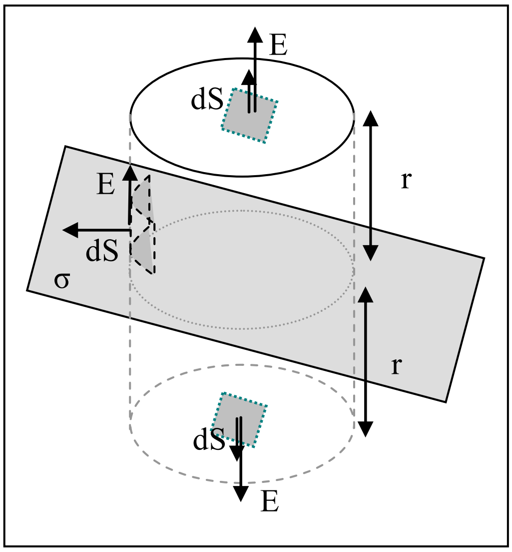
$$\boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \oint_s E \, d\vec{S} = E \int_s dS}$$

CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UN PLANO INDEFINIDO CARGADO UNIFORMEMENTE

En este caso suponemos un plano cargado con una densidad superficial de carga σ de tal forma que si esta es uniforme se puede escribir la carga de la siguiente forma:

$$Q = \sigma \cdot S$$

En este caso vamos a elegir como superficie de Gauss un cilindro con eje paralelo al campo E de altura 2r y radio finito tal como el que se ve en la figura.



En este caso la integral de superficie de convierte en la suma de tres, las dos correspondientes a las bases y la correspondiente a la superficie lateral, la correspondiente a la superficie lateral será cero puesto que los vectores E y dS son perpendiculares quedando por tanto:

$$\Phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\int_{base} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E\,S = 2\,E\,\pi r^2$$

Aplicando el Teorema de Gauss tendríamos:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r} = \oint_s E\,d\vec{S} = 2\,E\,\pi\,r^2$$

Luego despejando:

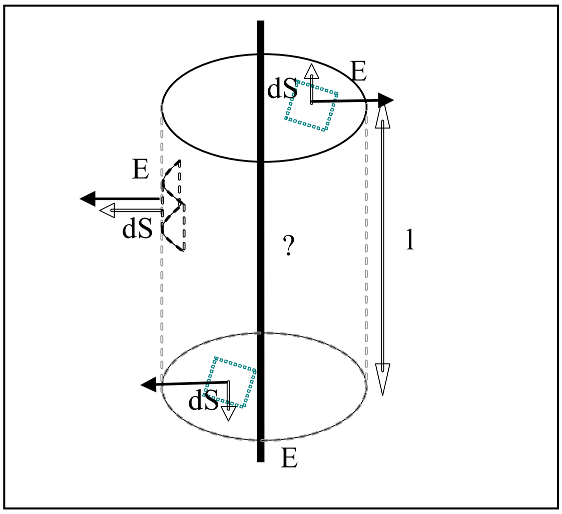
$$E = \frac{Q}{2\pi r^2\,\varepsilon} = \frac{\sigma\,\pi\,r^2}{2\pi\,r^2\,\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

CAMPO ELECTRICO CREADO POR UN HILO INDEFINIDO CARGADO UNIFORMEMENTE

En este caso suponemos un hilo cargado con una densidad lineal de carga λ de tal forma que si esta es uniforme se puede escribir la carga de la siguiente forma:

$Q = \lambda.\ L$

En este caso vamos a elegir como superficie de Gauss un cilindro con eje paralelo al hilo de altura l y radio finito tal como el que se ve en la figura y que pase por el punto en el que se quiere calcular el valor de E.



En este caso la integral de superficie de convierte en la suma de tres, las dos correspondientes a las bases y la correspondiente a la superficie lateral, las correspondientes a las superficie de las bases serán cero puesto que los vectores E y dS son perpendiculares quedando por tanto:

$$\Phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lateral} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,S = E\,2\pi r\,l$$

Aplicando el Teorema de Gauss tendríamos:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r} = \oint_s E\,d\vec{S} = E\,2\pi\,r\,l$$

Luego despejando:

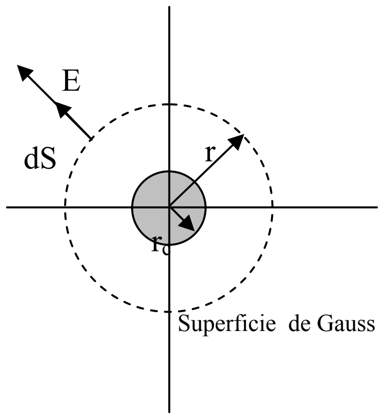
$$E = \frac{Q}{2\pi\,r\,l\,\varepsilon} = \frac{\lambda\,l}{2\pi\,rl\,\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\,\pi r\varepsilon}$$

CAMPO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA Y UNIFORME DE CARGA

En este caso suponemos una esfera cargada con una densidad volumétrica de carga ρ de tal forma que si esta es uniforme se puede escribir la carga de la siguiente forma:

$Q = \rho . V$

Punto del exterior



En este caso vamos a elegir como superficie de Gauss una esfera de radio r tal como el que se ve en la figura y que pase por el punto en el que se quiere calcular el valor de E.

En este caso la integral de superficie en todos sus puntos es tal que E y dS son paralelos quedando por tanto:

$$\Phi = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,S = E\,4\pi r^2$$

Aplicando el Teorema de Gauss tendríamos:

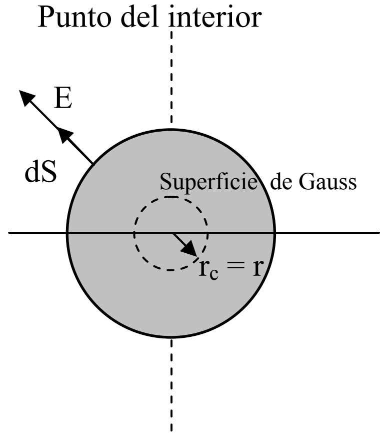
$$\frac{Q}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r} = \oint_s E\,d\vec{S} = E\,4\pi\,r^2$$

Luego despejando:

$$E = \frac{Q}{4\pi\,r^2\ \varepsilon} = \frac{\rho\cdot 4/3\pi\,r_c^3}{4\pi\,r^2\,\varepsilon} = \frac{r_c^3\,\rho}{3r^2}$$

Donde r_c es el radio de la esfera cargada encerrada en la superficie de Gauss y r el radio de la superficie de Gaus.

Punto del interior



Como se ve al comparar las dos posibilidades se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. En el caso de un punto exterior la esfera cargada se comporta como si fuese una carga puntual.
2. En el caso de un punto interior a la esfera, sucede como si fuese una esfera cargada de radio igual a la distancia el punto.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

En el interior de una nave espacial existen las siguientes cargas: 5 μC, –9 μC, 27 μC, –84 μC. Suponiendo que la constante dieléctrica del medio es ε_0, calcula el flujo de campo eléctrico que atraviesa las paredes de la nave. Compara el número de líneas de campo que salen de la nave con el número de líneas que entran en ella.

El teorema de Gauss permite calcular el flujo que atraviesa una superficie cerrada, *S*. Para el campo eléctrico, el teorema de Gauss se enuncia en la forma: expresión en la que Q_{int} es la carga total que encierra en su interior la superficie *S*, y ε, la constante dieléctrica del medio en que se encuentra dicha superficie. El número de líneas que atraviesan la superficie por unidad de superficie es proporcional al flujo que existe. Podemos hablar de un flujo que entra (cuando las cargas eléctricas que encierra la superficie son negativas) y de un flujo que sale (cuando las cargas eléctricas que encierra son positivas).

De acuerdo con lo dicho, el flujo total que atravesará las paredes de la nave será:

$$\phi_{total} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon} = \frac{(5-9+27-84)\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = -6,89\cdot 10^{6}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}}$$

El flujo que entra (correspondiente a las cargas negativas) es:

$$\phi_{-} = \frac{Q_{int(-)}}{\varepsilon} = \frac{(-9-84)\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = -10,51\cdot 10^{6}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}}$$

Mientras que el flujo que sale (que corresponde a las cargas positivas) resulta ser el siguiente:

$$\phi_{+} = \frac{Q_{int(+)}}{\varepsilon} = \frac{(5+27)\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = 3,62\cdot 10^{6}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}}$$

En cuanto a la relación que existirá entre las líneas de campo que salen y las que entran, esta será:

$$\frac{\phi_{-}}{\phi_{+}} = \frac{10,51\cdot 10^{6}}{3,62\cdot 10^{6}} = 2,90$$

lo que significa que, por cada 10 líneas de campo que salen, entran 29.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Una esfera conductora en equilibrio pose una carga superficial de densidad σ conocida, homogéneamente distribuida. Resabe que a una distancia l de su centro, el potencial es 1/10 del potencial de dicha esfera. Calcula:

1. El radio de la esfera conductora
2. La carga eléctrica de la esfera.
3. El potencial eléctrico de la esfera.
4. La intensidad del campo eléctrico en un punto muy próximo a la superficie de la esfera.
5. La intensidad del campo eléctrico en un punto del interior de la esfera.